Arab J. Math. Sc.
Volume 5, Number 2, December 1999
pp. 19-32

SUR LES NOMBRES DE PISOT TOTALEMENT RÉELS

TOUFIK ZAÏMI

ABSTRACT. Let $\Re$ denotes the set of the $(d-1)st$ real roots of totally real Pisot (or P-V) numbers of degree $d \geq 2$, we determine the two smallest elements of $\Re$ and a lower and a upper bound of the least limit point of $\Re$. We give also a lower bound of a totally real Pisot number in terms of the degree and the discriminant of its minimal polynomial.

1. INTRODUCTION

Soit θ un entier algébrique supérieur à 1 dont les conjugués sont de module inférieur à 1. Un tel entier est dit nombre de Pisot (ou bien P-V-nombre).

Dans [10], C. Siegel a montré que le nombre 1.3247... racine de $x^3 - x - 1$ est le plus petit nombre de Pisot; ensuite J. Dufresnoy et C. Pisot [4] ont déterminé les nombres de Pisot $\leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et ont montré que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le plus petit point limite de ces nombres.

On se propose ici de regarder un problème analogue, lorsque les conjugués du nombre de Pisot θ sont réels et on note un tel nombre NPTR.

L'un des premiers résultats sur les NPTR est dû à C. Pisot qui a prouvé que les NPTR sont isolés [6]. Plus généralement, A. Schinzel [9] a montré que si θ est un entier algébrique totalement réel de degré d, alors la mesure de θ vérifie

---

1991 Mathematics Subject Classification. 11R06.

$$M(\theta) \geq (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{\frac{d}{2}}.$$

Ensuite, C. J. Smyth [11 et 12] a déterminé les plus petits points de l'ensemble $\{(M(\theta))^{\frac{1}{d}}$ où θ est un entier algébrique totalement réel de degré $d \geq 1\}$ montrant notamment que cet ensemble est dense dans l'intervalle (l, ∞) où $l = 1.3142....$

Plus récemment, M. J. Bertin [2] a donné une minoration des mesures des entiers totalement réels qui fait intervenir les normes de ces entiers.

Dans la première partie de ce papier on détermine les deux plus petits éléments de l'ensemble

$$\Re = \{\theta^{\frac{1}{(d-1)}} \text{ où } \theta \text{ est un NPTR de degré } d > 1\}$$

(le choix de la puissance $\frac{1}{d-1}$ au lieu de la puissance apparemment plus naturelle $\frac{1}{d}$ est dû au lemme 1 du paragraphe qui suit) et on donne un minorant (resp. un majorant) du plus petit élément de l'ensemble $\Re^{(1)}$ (resp. de l'ensemble $\Re^{(2)}$) des points limites de $\Re$ (resp. de $\Re^{(1)}$).

Dans la deuxième partie on s'intéresse au plus petit nombre de Pisot dans un corps de nombres totalement réel. On donne une minoration pour un tel nombre qui fait intervenir le discriminant et le degré du corps et on étudie quelques cas de bas degrés. Les calculs sont faits grâce au système Pari [1].

2. LES PETITS NPTR

Dans ce qui suit les polynômes minimaux, les degrés, les normes et les conjugués des entiers algébriques sont considérés sur le corps des rationnels. On confondra aussi la fonction polynôme avec sa valeur.

Les deux théorèmes qui suivent sont basés sur le lemme suivant :

Lemme 1. *Soient θ un NPTR de degré $d \geq 2$ et P un polynôme à coefficients entiers rationnels, de degré n et tel que $P(\theta^2) \neq 0$ alors*

$$\theta^{\frac{2}{d-1}} \max_{0\leq x\leq 1} |P(x)|^{\frac{1}{n}} \max_{\rho\leq x\leq 1} |P^*(x)|^{\frac{1}{n(d-1)}} \geq 1,$$

où $P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ et ρ est tel que $\rho\theta^2 \leq 1$.

Preuve. Comme $P(\theta^2)$ est non nul, la valeur absolue du résultant du polynôme minimal de θ^2 et du polynôme P est ≥ 1 et par suite

$$|P(\theta^2)| \max_{0\leq x\leq 1} |P(x)|^{d-1} \geq 1.$$

Il suffit de remarquer que

$$|P(\theta^2)| = \theta^{2n} \left|\frac{P(\theta^2)}{\theta^{2n}}\right| \leq \theta^{2n} \max_{1\leq x\leq \frac{1}{\rho}} \left|\frac{P(x)}{x^n}\right| = \theta^{2n} \max_{\rho\leq x\leq 1} |P^*(x)|,$$

pour déduire l'inégalité voulue (*si $\rho = 0$ alors $\frac{1}{\rho} = \infty$*).

Pour prouver le théorème 1, on a également besoin du lemme calculatoire suivant :

Lemme 2. *Soit θ un NPTR de degré d et de norme N, alors $\theta > 2^{\frac{d-1}{2}}\sqrt{|N|}$. Si de plus les conjugués de θ sont tous positifs alors $\theta > 2^{d-1}\sqrt{N}$.*

Preuve. Avec les notations du lemme 2 et en considérant le carré de θqui est aussi un NPTR, on peut restreindre la preuve au cas où les conjugués de θsont positifs.

Comme le polynôme $x(x-1)$ atteint son minimum sur l'intervalle [0,1] en $\frac{1}{2}$, les conjugués de l'entier algébrique $\theta(\theta-1)$ autres que lui sont dans l'intervalle $]-\frac{1}{4}, 0\,[$ et par suite $\theta(\theta-1) > 4^{d-1}N$, d'où le résultat.

Théorème 1. *Les deux plus petits éléments de $\Re$ sont $\alpha_0 = 1.4954...$ où α_0^4 admet pour polynôme minimal $x^5-5x^4-x^3+5x^2-1$ et $\alpha_1 = 1.4989...$ où α_1^2 admet pour polynôme minimal x^3-2x^2-x+1.*

Preuve. Soient n un entier naturel $\geq$ 2et P_n un polynôme qui a le plus petit maximum sur l'intervalle $[0,1]$ parmi tous les polynômes de degré n à coefficients entiers rationnels.Un tel polynôme est dit polynôme entier de Tchebichev de degré n de l'intervalle [0,1] et est connu ainsi que son maximum sur [0,1] pour $n \leq 75$ [5]. Une liste des polynômes P_n a été également donnée dans [3] pour $n \leq 22$.

Avec les notations du lemme 1, il s'agit de choisir le polynôme P parmi les P_n tel que la quantité

$$f(n,d) = \max_{0\leq x\leq 1} |P_n(x)|^{\frac{1}{n}} \max_{0\leq x\leq 1} |P_n^*(x)|^{\frac{1}{n(d-1)}} ,$$

soit la plus petite possible. En effet pour $n \leq 75$ aucun des polynômes P_n n'admet pour racine un entier algébrique autre que 0 et 1 et donc $P_n(\theta^2)$ est non nul pour tout NPTR θ.

Une estimation de $f(n,7)$ pour $n \leq 75$ montre que cette fonction atteint son minimum pour $n = 60$ (si P_n est une puissance d'un autre P_k on ne le prend pas car on a la même valeur) et notre choîx se porte donc sur le polynôme P_{60} défini par

$$P_{60}(x) = (x^2-x)^{21}(2x-1)^8(5x^2-5x+1)^3(29x^4-58x^3+40x^2-11x+1)$$

et qui vérifie

$$\max_{0\leq x\leq 1} |P_{60}(x)|^{\frac{1}{60}} = \frac{1}{2.33574...}. \tag{1}$$

Des inégalités

$|29-58x+40x^2-11x^3+x^4| \leq 29$, $|5-5x+x^2| \leq 5$, $|2-x| \leq 2$ et $|1-x| \leq 1$, vraies pour x compris entre 0 et 1, on déduit

$$\max_{0\leq x\leq 1} |P_{60}^*(x)| = P_{60}^*(0) = 928000 \tag{2}$$

et

$$f(60,7) = 0.4447... < \frac{1}{\alpha_1^2} = 0.4450....$$

Il s'ensuit par le lemme 1 que si $d \geq 7$, alors

$$\theta^{\frac{1}{d-1}} > \alpha_1.$$

Une estimation de $f(n,6)$ pour $n \leq 75$ montre que cette quantité est toujours $> \frac{1}{\alpha_1^2}$, on considère donc les cas $2 \leq d \leq 6$ séparément.

1. $d = 2$

Soit β le plus petit NPTR, alors $(\beta^2 - 1)$ est aussi un NPTR qui est $\geq \beta$ et par suite $\beta \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \alpha_1$.

2. $d = 3$

Les NPTR < 4 sont connus [15, tableau 2] et le plus petit est $2.2469... = \alpha_1^2$ racine de $x^3 - 2x^2 - x + 1$.

3. $d = 4$

Soit θ un NPTR $\leq \alpha_1^3$ $=3.3682...$ et de polynôme minimal $Q(x) = x^4 - a_1x^3 + a_2x^2 - a_3x + a_4$ et soient $\theta_2 > \theta_3 > \theta_4$ les conjugués de θ dans l'intervalle $]-1,1[$.

Le lemme 2, montre que θ est une unité et que le cas où $\theta_4 > 0$ ne peut avoir lieu. De même le cas où $\theta_2 < 0$ ne peut avoir lieu car le NPTR, $\theta + 1$, de degré 4, admet seulement des conjugués positifs. Il y a donc deux cas à étudier :

Cas $\theta_3 > 0$

Dans ce cas $a_4 = -1$. Du lemme 1 et des inégalités (1) et (2), on obtient $\theta^{\frac{2}{3}} \geq \frac{1}{f(60,4)} > \frac{2.3357}{928000^{\frac{1}{180}}} > 2.1640$ et par suite $\theta > 3.1833$ et $3 \leq a_1 \leq 5$.

Des inégalités $1 < \theta\theta_2 < 3.3683$, $1 < \theta\theta_3 < 3.3683$, $-3.3683 < \theta\theta_4 < 0$, $0 < \theta_2\theta_3 < 1, -1 < \theta_2\theta_4 < 0$ et $-1 < \theta_3\theta_4 < 0$ (resp. $0 < \theta\theta_2\theta_3 < 3.3683$, $-3.3683 < \theta\theta_2\theta_4 < -1$, $-3.3683 < \theta\theta_3\theta_4 < -1$ et $\frac{-1}{3.1833} < \theta_2\theta_3\theta_4 < \frac{-1}{3.3683}$), on obtient $-3 \leq a_2 \leq 7$ (resp. $-7 \leq a_3 \leq 1$).

En rajoutant les conditions nécessaires $Q(1) < 0$ et $Q(-1) > 0$ (les polynômes obtenus ont une racine supérieure à 1 et une racine négative supérieure à -1), on obtient 73 valeurs possibles pour le polynôme Q. Puis la condition sur le discriminant de Q qui devrait être positif (les polynômes obtenus ont des racines réelles) donne 3 polynômes qui admettent pour racines des NPTR dont le plus petit est $3.8115... > \alpha_1^3$.

Cas $\theta_3 < 0$

De manière identique au cas précédent on obtient les inégalités $2 \leq a_1 \leq 4$, $-8 \leq a_2 \leq 2$, $-6 \leq a_3 \leq 2$, et $a_4 = 1$ qui donnent aussi 297 cas possibles. Les conditions $Q(1) < 0$ et $Q(-1) > 0$ restreignent ce nombre à 76 alors que la condition sur le discriminant le réduit à 4 polynômes qui admettent pour racines des NPTR dont le plus petit est $3.3902... > \alpha_1^3$.

4. $d = 5$

Soit θ un NPTR $\leq \alpha_1^4$ =5.0489... et de polynôme minimal $Q(x) = x^5 - a_1x^4 + a_2x^3 - a_3x^2 + a_4x - a_5$. Le lemme 2 montre que θ est une unité .

Soient $\theta_2 > \theta_3 > \theta_4 > \theta_5$ les conjugués de θ dans l'intervalle $]-1,1[$. Si $\theta_5 > 0$ (resp. si $\theta_2 < 0$), le lemme 2 montre que $\theta > 16$ (resp. $\theta > 15$). Trois cas sont donc à envisager :

Cas $\theta_3 < 0$

les conjugués de l'entier algébrique de degré 5, $(\theta + 1)$ sont tous positifs. Parmi ces conjugués seulement deux sont > 1 et leur produit est $< 2(\theta + 1)$. D'après [12], $2(\theta + 1) > 1.72^5$ et $\theta > 6.5$.

Cas $\theta_4 < 0$ et $\theta_3 > 0$

Par le lemme 1 et les inégalités (1) et (2), on obtient $\theta^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{f(60,5)} > \frac{2.3357}{928000^{\frac{1}{240}}}$ et par suite $3 \leq a_1 \leq 7$, $-12 \leq a_2 \leq 10$, $-20 \leq a_3 \leq 8$, $-8 \leq a_4 \leq 9$ et $a_5 = 1$ ce qui donne 60030 valeurs possibles pour Q. En rajoutant les conditions $Q(-1) < 0$ et $Q(1) < 0$, on trouve 15175 valeurs. La condition sur le discriminant de Q qui devrait être positif, réduit ce nombre à 8007. En rajoutant une condition pour que les racines de Q soient toutes réelles ainsi qu'une condition sur la mesure de Q qui devrait être < 5.049, on trouve l'unique polynôme $x^5 - 5x^4 - x^3 + 5x^2 - 1$ ayant pour racine le NPTR α_0^4 =5.0016....

Cas $\theta_4 > 0$

De manière identique au cas précédent, on obtient les inégalités $4 \leq a_1 \leq 8$, $-5 \leq a_2 \leq 17$, $-15 \leq a_3 \leq 13$, $-15 \leq a_4 \leq 2$ et $a_5 = -1$ qui donnent aussi 60030 valeurs possibles pour Q.

Les conditions $Q(1) < 0$ et $Q(-1) < 0$ restreignent ce nombre à 22985 alors que la condition sur le discriminant le réduit à 188. Aucun de ces polynômes n'est de mesure < 5.049.

5. $d = 6$

Soient θ un NPTR $\leq \alpha_1^5$ =7.5682... et $\theta_2 > \theta_3 > \theta_4 > \theta_5 > \theta_6$ les conjugués de θ dans l'intervalle $]-1,1[$. Comme pour les deux cas précédents et en utilisant le lemme 2, on obtient que θ est une unité et que le cas où $\theta_6 > 0$ ainsi que le cas où $\theta_2 < 0$ ne peuvent avoir lieu.

Si $\theta_3 < 0$, alors les conjugués de l'entier algébrique de degré 6, $\theta + 1$ sont tous positifs. Parmi ces conjugués seulement deux sont > 1 et leur produit est $< 2(\theta + 1)$. D'après [9], $2(\theta + 1) \geq (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6$ et $\theta \geq 7.9$.

On considère ensuite les trois cas $\theta_4 < 0 < \theta_3$, $\theta_5 < 0 < \theta_4$, et $0 < \theta_5$ et en utilisant l'inégalité $\theta^{\frac{2}{5}} \geq \frac{1}{f(60,6)} > \frac{2.3357}{928000^{\frac{1}{300}}}$ obtenûe comme dans les cas précédents par le lemme 1 et les inégalités (1) et (2), les mêmes calculs ne donnent aucun polynôme verifiant les conditions voulues. Ceci achève la preuve du théorème 1.

Théorème 2. *(i) Soit θ un NPTR de degré d suffisamment grand, alors*

$$\theta^{\frac{1}{d-1}} > 1.5366,$$

(ii) $\mathrm{Inf}\Re^{(1)} \geq 1/\mathrm{Inf}_{P\in C} \max_{0\leq x\leq 1} |P(x)|^{\frac{1}{2n}}$,

où C désigne l'ensemble des polynômes P à coefficients entiers rationnels, de degré $n \geq 1$ et tels que si θ_d est le plus petit NPTR de degré d alors $P(\theta_d^2) \neq 0$ pour d suffisamment grand.

(iii) $\mathrm{Inf}\Re^{(2)} \leq 2$.

Preuve. Soit θ_d le plus petit NPTR de degré $d \geq 2$ et P un polynôme de degré n, à coefficients entiers rationnels et tel que $P(\theta_d^2) \neq 0$. Le lemme 1 montre qu'on obtient une suite de minorants des quantités $\theta_d^{\frac{1}{d-1}}$ qui croît avec d vers $1/\max_{0\leq x\leq 1} |P(x)|^{\frac{1}{2n}}$.

Si l'on choisit dans le lemme 1 pour polynôme P le polynôme trouvé par L. Habsieger et B. Salvy [5], de degré $(10^{10} - 5)$ et dont les racines autres que 0 et 1 ne sont pas des entiers algébriques, on obtient alors une suite de minorants qui croît vers 1.5366... d'où le (i).

Avec les notations du théorème 2(ii) et si l'on choisit le polynôme P dans l'ensemble C, du lemme 1 on déduit

$$\mathrm{Lim}_d \theta_d^{\frac{2}{d-1}} \geq 1/\max_{0\leq x\leq 1} |P(x)|^{\frac{1}{n}}$$

et le (ii) s'ensuit.

Pour prouver le (iii), on va montrer que si k est un entier naturel, alors le nombre $2^{(1+\frac{1}{k})}$ est un point limite de $\Re$.

Soit Q le polynôme défini par

$$Q(x) = x^{d+1} - 2^{\frac{d}{k}} T_d(x),$$

où d est un multiple de k et T_d désigne le d-ième polynôme de Tchebichev défini par $T_d(\cos x) = \cos(dx)$.

De l'égalité

$$Q(\cos \tfrac{j\pi}{d}) = (\cos \tfrac{j\pi}{d})^{d+1} - 2^{\frac{d}{k}}(-1)^j,$$

vraie pour tout entier rationnel $0 \leq j \leq d$, on déduit que le polynôme Q est le polynôme minimal d'un NPTR. Il suffit de montrer les deux inégalités $Q(2^{r-1} + \frac{1}{2^{r+1}}) > 0$ et $Q(2^{r-2} + \frac{1}{2^r}) < 0$ où $r = d + \frac{d}{k}$, pour compléter la preuve du (iii).

D'une part

$$\begin{aligned} Q(2^{r-1} + \tfrac{1}{2^{r+1}}) = Q(\tfrac{2^r+1/2^r}{2}) &= \tfrac{1}{2^{d+1}}(2^r + \tfrac{1}{2^r})^{d+1} - 2^{r-d-1}(2^{rd} + \tfrac{1}{2^{rd}}) \\ &= 2^{(d+1)(r-1)}[(1 + \tfrac{1}{4^r})^{d+1} - (1 + \tfrac{1}{4^{rd}})] > 0 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} Q(2^{r-2}+\tfrac{1}{2^r}) = Q(\tfrac{2^{r-1}+1/2^{r-1}}{2}) &= 2^{(d+1)(r-2)}\,[(1+\tfrac{1}{4^{r-1}})^{d+1} - 2(1+\tfrac{1}{4^{d(r-1)}})] \\ &< 2^{(d+1)(r-2)}[(1 + \tfrac{1}{4^{r-1}})^{d+1} - 2] < 0. \end{aligned}$$

Remarques.

1. Avec les notations du théorème 2(ii) et si les polynômes entiers de Tchebichev appartiennent à la classe C (il suffit que les seuls facteurs irreductibles unitaires de ces polynômes soient ou bien x ou bien $x - 1$ comme c'est le cas pour les degrés ≤ 75), alors le théorème 2 (ii) devient

$$\mathrm{Inf}\Re^{(1)} \geq 1/\sqrt{t_Z[0,1]},$$

où

$$t_Z[0,1] = \mathrm{Inf}_{p \in Z[x]} \max_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|^{\frac{1}{n}}$$

est le diamètre transfini entier de l'intervalle $[0, 1]$ et qui vérifie l'inégalité (citée dans [3])

$$t_Z[0,1] \geq \frac{1}{2.3768401}.$$

On en déduit que par la présente méthode $\operatorname{Inf}\Re^{(1)}$ ne peut dépasser la borne 1.5418.

2. On montre comme dans la preuve du théorème 2(iii) que le polynôme

$$(x^{d+1} - T_d(x))/(x-1),$$

est le polynôme minimal d'un NPTR θ qui vérifie

$$2^{d-1} - 1 < 2^{d-1}/4^{\frac{d+1}{4^d}} < \theta < 2^{d-1}.$$

Il s'ensuit que 2 est un point limite (par valeurs inférieures) de $\Re$.

3. SUR LE PLUS PETIT NOMBRE DE PISOT DANS UN CORPS DE NOMBRES TOTALEMENT RÉEL

Soit K un corps de nombres de discriminant Δ_K, il est bien connu [8] que le corps K contient un nombre de Pisot qui engendre ce corps et qui est $< \sqrt{|\Delta_K|}$.

La question qui se pose est quel est le plus nombre de Pisot θ_K qui engendre K. La réponse à une telle question pourrait fournir une minoration non triviale des discriminants des corps de nombres totalement réels. Dans ce qui suit on montre que la borne $\sqrt{\Delta_K}$ est optimale pour les corps quadratiques mais ne l'est pas pour les corps cubiques.

Cas quadratique.

Soit $K = Q(\sqrt{m})$ un corps quadratique où m est un entier naturel sans facteur carré et θ un nombre de Pisot qui engendre K. Si $m \equiv 2, 3 \mathrm{mod}(4)$, alors il existe deux entiers rationnels a et b tel que $\theta = a + b\sqrt{m}$. L'inégalité $a + b\sqrt{m} < 2\sqrt{m}$ jointe aux inégalitées $-1 < a - b\sqrt{m} < 1$, donne une unique solution

$$\theta = E(\sqrt{m}) + \sqrt{m},$$

ou E désigne la fonction partie entière.

Le même calcul montre que si $m \equiv 1 \mathrm{mod}(4)$ et $\theta < \sqrt{m}$, alors ou bien $\theta = \frac{E(\sqrt{m})+\sqrt{m}}{2}$ ou bien $\theta = \frac{E(\sqrt{m})-1+\sqrt{m}}{2}$.

Corollaire. *Soit K un corps quadratique réel de discriminant Δ_K, alors il existe un et un seul nombre de Pisot $< \sqrt{\Delta_K}$. De plus ce nombre est $> (\sqrt{\Delta_K} - 1)$.*

Cas cubique.

Soit P le polynôme $P(x) = x^3 - lx^2 + 1$ où l est un entier naturel ≥ 3. Comme $P(l) = 1$, $P(1) = 2 - l$, $P(0) = 1$ et $P(-1) = -l$, on déduit que la racine $\theta > 1$ du polynôme P est un nombre de Pisot et que le corps $K = Q(\theta)$ est un corps cubique totalement réel. Comme le discriminant D du polynôme P est égal a la norme de l'entier $(3\theta - 2l)$ de K, on obtient $D = 4l^3 - 27$. De l'égalité $\left(\theta + \frac{1}{\theta^2}\right)^3 = l^3$ ainsi que de l'inégalité $\theta + \frac{1}{\theta^2} \geq 3$, on déduit $D + 14 < 4\theta^3 < D + 15$.

Proposition. *Avec les notations ci-dessus et si D est sans facteur carré alors $D = \Delta_K$ et $4\theta_K^3 \leq 4\theta^3 < \Delta_K + 15 < 2\Delta_K$.*

Un autre exemple pourrait être déduit du tableau 2 de [15]. En effet, ce tableau montre que tout corps cubique totalement réel K de discriminant $\Delta_K \leq 404$ contient un et un seul nombre de Pisot inférieur à $\Delta_K^{\frac{1}{3}}$. Avec des valeurs approchées, le tableau suivant résume ces constatations

(notons que $\frac{\Delta_K^{\frac{1}{3}}}{\theta_K} \leq 0.67$) :

Δ_K	$\Delta_K^{\frac{1}{3}}$	θ_K
49	3.65	2.24
81	4.32	2.87
148	5.28	3.21
169	5.52	3.65
229	6.11	3.11
257	6.35	3.49
404	7.39	3.68

Toutefois je n'ai pas pu montrer que $\frac{\Delta_K^{\frac{1}{3}}}{\theta_K} < 1$ pour tout corps cubique K. Réciproquement, le théorème suivant montre que dans la proposition précédente la puissance troisième de θ_K ne peut pas être remplacée par la puissance quatrième :

Théorème 3. *Soient $0 \leq t \leq 1$ un nombre réel, K un corps de nombres totalement réel de degré $d \geq 2$ et de discriminant Δ_K et θ_K le plus petit nombre de Pisot qui engendre K, alors*

$$\theta_K \geq (\Delta_K^{\frac{1}{2(d-1)}} r_{d-1}^{\frac{d-2}{2}} - 1)^t \alpha_0^{(1-t)(d-1)},$$

où α_0 est défini dans le théorème 1 et $r_d^{d(d-1)} = \frac{1}{(\prod_{1\leq i\leq d} i^i)(\prod_{1\leq i\leq d-2} \frac{i^i}{(2i+1)^{2i+1}})}$.

Preuve.

Soient θ, $\theta_2, ..., \theta_d$ les conjugués du NPTR θ et D le discriminant de son polynôme minimal alors

$$D < (\theta+1)^{2(d-1)} \prod_{2\leq i<j\leq d} (\theta_i - \theta_j)^2.$$

De l'égalité de Stieljes [13] :

$\max_{-1\leq x_i\leq 1}\prod_{1\leq i<j\leq d}(x_i-x_j)^2 = (\prod_{1\leq i\leq d} i^i)(\prod_{1\leq i\leq d-2}\frac{i^i}{(2i+1)^{2i+1}}) = \frac{1}{r_d^{d(d-1)}}$,

on obtient :

$$Dr_{d-1}^{(d-1)(d-2)} < (\theta+1)^{2(d-1)}$$

et

$$\theta > D^{\frac{1}{2(d-1)}} r_{d-1}^{\frac{d-2}{2}} - 1 \geq \Delta_K^{\frac{1}{2(d-1)}} r_{d-1}^{\frac{d-2}{2}} - 1.$$

Du théorème 1 et de la dernière inégalité on déduit le résultat.

Il est bien evident (d'après le théorème 1) que le théorème 3 est optimal lorsque $t=0$ et $d=5$. Il l'est également (asymptotiquement) lorsque $t=1$ et $d=2$ d'après le corollaire précédent.

Rappellons enfin qu'il est bien connu que la suite $(r_d)_d$ croît vers 2. Ce résultat dont une preuve calculatoire est donnée dans [14] est un cas particulier d'un théorème plus général sur le diamètre transfini d'un intervalle et est bien expliqué dans [7].

RÉFÉRENCES

1. C. Batut, D. Bernardi, H. Cohen et M. Olivier, *Pari calculator*, copyright 1989, 1992.

2. M.J. Bertin, *The operator* $x+\frac{1}{x}-2$ *and reciprocal integers*, to appear in the Proceedings of the C. N. T. A. 5, Ottawa, (1996).

3. P. Borwein and T. Erdélyi, *The integer Chebyshev problem*, Math. Comp. **65**(1996), 661 – 681.

4. J. Dufresnoy et C. Pisot, *Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **72**(1955), 69 – 92.

5. L. Habsieger and B. Salvy, *On integer Chebyshev polynomials*, Math. Comp. **66**(1997), 763 – 770.

6. C. Pisot, *Etude de certains entiers algébriques,* Séminaire A. Chatelet et P. Dubreil (Algèbre et théorie des nombres), 1950 – 1951.

7. R. M. Robinson, *Intervals containing infinitely many sets of conjugate algebraic integers*, pp. 305-315, Studies in Mathematical Analysis and related topics, Standford university press, 1962.

8. R. Salem, *algebraic numbers and Fourier analysis*, Heath Math. Monographs, Heath, Boston, 1963.

9. A. Schinzel, *On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number*, Acta Arith. **24**(1973), 385 – 399.

10. C. L. Siegel, *Algebraic integers whose conjugates lie in the unit circle*, Duke Math. J. **11**(1944), 597 – 602.

11. C. J. Smyth, *On the measure of totally real algebraic integers* , J. Austral. Math. Soc. **30**(1980), 137 – 149.

12. C. J. Smyth, *On the measure of totally real algebraic integers* II, Math. Comp. **37**(1981), 205 – 208.

13. M. Stieltjes, *Sur quelques théorèmes d'Algèbre*, C.R.A.S. Paris, **100**(1885), 439 – 440.

14. T. Zaïmi, *Minoration du diamètre d'un entier algébrique totalement réel,* C. R. A. S. Paris, **319**(1994), 417-419.

15. T. Zaïmi, *Sur les K-nombres de Pisot de petite mesure*, Acta Arith. **77**(1996), 103 – 131.

Department of Mathematics, College of Science, King Saud University, P.O. Box 2455, Riyadh 11451, Saudi Arabia.
E-mail: zaimitou@ksu.edu.sa

Date received June 5, 1999.